

نقول عن علاقة ثنائية R على مجموعة غير الخالية E اننا علاقة ترتيب على E اذا وفقط اذا حققت الشروط الثلاثة التالية :

(1) R انتكاسية أي $x R x$ فذلك $\forall x \in E$
 (2) R تحالفية أي اذا كانت $x R y$ و $y R x$ فإن $x = y$

(3) R متعصية أي اذا كانت $x R y$ و $y R z$ فإن $x R z$

نسلك عام فإننا نكتب علاقة الترتيب $x \leq y$
 (x أصغر أو تساوي y) بدلا من $x R y$
 وفي حال وجود التباس، وصفاً للمفهوم فإننا نكتب $x \leq_E y$ تعني أن E علاقة الترتيب معرفة على E

أو $x \leq y$ (اذا كانت يوجد أكثر من علاقة ترتيب)

* اننا المجموعة E المزودة بعلاقة ترتيب سوف ندعوها مجموعة مرتبة.

أمثلة

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} مزودة بعلاقة الترتيب المألوفة $x \leq y$ هي مجموعة مرتبة.

(2) مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N}^* (\mathbb{N} عدد الصفر)
 المزودة بعلاقة القسمة x/y (x يقسم y)
 المعرفة كما يلي:

يوجد $a \in \mathbb{N}^*$ بحيث أن $y = a \cdot x$ هي أيضا
 مجموعة مرتبة.

(3) مجموعة أجزاء المجموعة E ونرمز لها بالرمز $P(E)$
 المزودة بعلاقة الارتفاع $X \subset Y$ (حيث E
 مجموعة ما) هي مجموعة مرتبة.
 سوف نقدم الرموز التالية:

$$\begin{aligned} (1) \quad x \neq y &: x \text{ ليست أصغر من } y \\ (2) \quad x < y &: x \text{ أصغر تماما عن } y \text{ أي} \\ & x \leq y \text{ و } x \neq y \end{aligned}$$

نقول عن العنصرين x و y أنها متقارنان إذا
 كان $x \leq y$ أو $y \leq x$
 معاً إذا كان خلاف ذلك فإثنا نقول عنهما أنها غير
 متقارنان أي أن $x \not\leq y$ و $y \not\leq x$

نقول عن علاقة ترتيب بأنها ترتيب كلي (أو تام) إذا
 كان جميع عناصرها قابلين أي أنه كل اثنين منها
 قابلين كما نسميها أيضا (مجموعة مرتبة كلية) أو سلسلة.

أمثلة

- (1) M مع علاقة الترتيب العادية هي سلسلة
- (2) M' مع علاقة يقسم ليست سلسلة
- (3) $P(E)$ مع علاقة الاهتواء ليست سلسلة (إذا كانت E تحتوي على الدقة عنصريين)

علاقة

في حالة السلسلة إذا كان $x \neq y$ يكفي $x < y$

الترتيب العكسي

لتكن $(E, <)$ مجموعة مرتبة حيث يمكن عندئذ تعريف علاقة لبيبة على E تكتب $y \gg x$ والتي تكافئ $x < y$ على أن $x \leq y$ ويمكن التحقق بسهولة أنها علاقة ترتيب.

$x \gg y$ العلاقة الترتيب العكسي
للعلاقة $y \leq x$
كما تكتب أيضاً:

$x \not\gg y : x$ ليست أكبر أو تساوي y
 $x > y : x$ أكبر تماماً من y أي أنه
 $x \gg y$ و $x \neq y$

الترتيب المولد (أو مقصور على علاقة الترتيب)

لتكن (E, \leq) مجموعة مرتبة و A مجموعة جزئية
غير خالية من E فإن أثر علاقة الترتيب على
 $A \times A$ هي علاقة ترتيب على A نرمز لها بـ
 \leq_A والمعرفة بالشكل:

$x \leq y$ حيث أن $x, y \in A$
وتسمى هذه العلاقة علاقة الترتيب المولد على A

مثال

لتكن المجموعة المرتبة (\mathbb{N}^*, \leq) ولتكن
 $A = \{1, 2, 8, 64\}$
نلاحظ بأن A هي سلسلة من أجل الترتيب المولد رغم
أن علاقة الترتيب على \mathbb{N}^* ليست كلية.
ترتيب الكبار

لتكن $\{(\leq_i, E_i)\}_{i \in I}$ أسرة من المجموعات المرتبة،
 $\{(\leq_i, E_i)\}_{i \in I}$
عندها يمكن أن نعرف على مجموعة الكبار
 $E = \prod_{i \in I} E_i$

العلاقة $(x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I}$ كما يلي:

$y \leq x$ وذلك من أجل أي $i \in I$ وليكن أنه
 نرصد بسهولة على أنها علاقة ترتيب على
 $E = \prod_{i \in I} E_i$
 نعوها علاقة ترتيب الجداء
 حالة خاصة



لتكن (E, F) مجموعة التطبيقات من E في F
 f فيمكن مطابقتها مع المجموعة \bar{F}^E أي مع
 $\prod_{x \in E} f_x$ حيث $f_x = f$

أي أنه يمكن مطابقة كل تطبيق $f : E \rightarrow F$
 مع المجموعة $(f_x)_{x \in E}$

فإذا كانت f مجموعة مرتبة فيمكن عندئذ تعريف علاقة
 ترتيب الجداء على المجموعة (E, F) كما يلي :
 $f \leq g$ إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq g(x)$
 وذلك من أجل أي $x \in E$
 علاقة



إنه جدار سلسل ليس بالضرورة سلسلة
 مثال



في مربع السلسلة (\mathbb{N}, \leq) فلنأخذ الزوجين
 (كروا) و (2, 5) غير مقارنين

أب أن (M^2) ليست سالبة

مورفزمات المجموعات المرتبطة

لتكن $(E, <)$ و $(F, <)$ مجموعتان مرتبقتان

و $f: E \rightarrow F$ تطبيق من E إلى F فإننا

نقول عن f بأنه مورفزم لترتيب أو تطبيق متزايد

إذا كانت $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

وبشكل مشابه نعرف التطبيق المتناقص

$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

والتطبيق المتزايد تماماً:

$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

والتطبيق المتناقص تماماً:

$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

ملحوظات

(أ) التطبيق الثابت يكون بنفس الوقت متزايد ومتناقص

ولكن العكس ليس صحيح دوماً

مثال

لتكن المجموعة $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مرتبة بدرجة تقسم

و $F = M$ مع علاقة الترتيب العادي

لنصف f كما يلي:

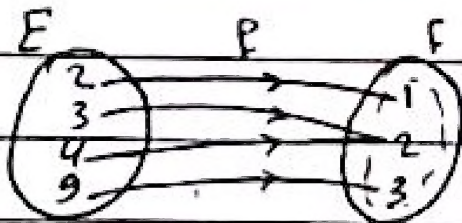
$f(3) = f(9) = 2$ و $f(2) = f(4) = 1$

فإن f يكون متزايد وقتاً قدم بنفس الوقت ولكنه ليس تاماً

(2) كل تطبيق متزايد ومتباين يكون متزايداً تاماً لكن ليس بالضرورة كل تطبيق متزايد تاماً يكون متبايناً
مثال

لأن نفس المجموعات السابقة في المثال السابق بحيث أن

$$f(9) = 3 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = f(4) = 2$$



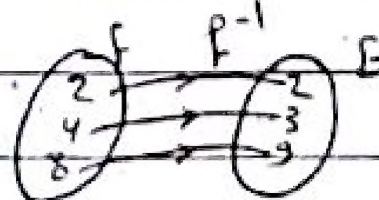
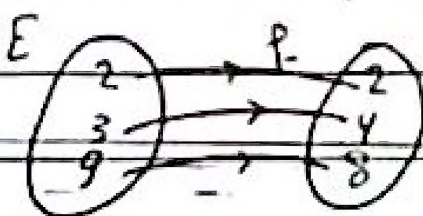
نلاحظ أن f متزايد تاماً لكنه ليس متبايناً

(3) إذا كانت f تقابلية متزايدة فإن التطبيق العكسي له f^{-1} ليس بالضرورة متزايداً
مثال

$$R = 1 \quad ; \quad E = \{2, 3, 9\}$$

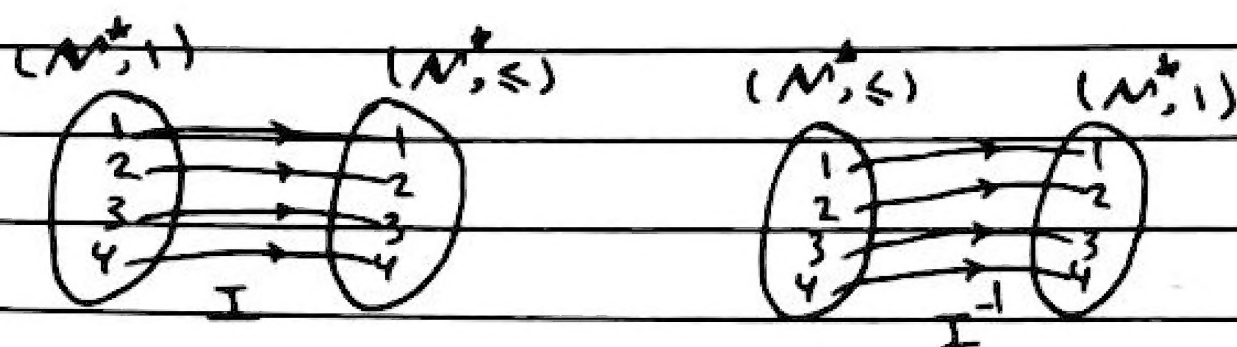
$$R' = 1 \quad ; \quad F = \{2, 4, 8\}$$

$$f(2) = 2 \quad f(3) = 4 \quad f(9) = 8$$



نلاحظ أنه f تقابل فتزايد ولكن f^{-1} غير فتزايد
مثال آخر

التطبيق المطابق من (M, \leq) إلى (M, \leq) هو تقابل فتزايد لكن تطبيقه العكسي ليس فتزايداً



ايزومورفيزم الترتيب

نقول عن التطبيق $f: E \rightarrow F$ بأنه ايزومورفيزم ترتيب إذا كان:

(1) f تقابل

(2) $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$ وهذا يعني أنه كل من f و f^{-1} يحافظان على الترتيب وبالتالي يتبع أنه كل من f و f^{-1} هما ايزومورفيزم ترتيب تماماً

إذا كانت E سلسلة فإنه يمكن تعريف ايزومورفيزم الترتيب بأنه تقابل فتزايد وذلك لأنه إذا كان

محاضرات الدلتر

قسم: الرياضيات / الماد: نظرية الشبكات المحاضرة: الاولى. تاريخ:

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \not\leq x$$

او ذلك لان لو كان غلط، ذلك لان

$$f(y) < f(x) \Leftarrow y < x$$

وهذا مخالف للفضية

$$\Rightarrow x < y$$

أما أنه f^{-1} متزايد

انتهت المحاضرة